Universidad Nacional de Ingeniería **17-02-2006**
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2005-2**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades

**SOLUCIONARIO - EXAMEN FINAL DE
CALCULO NUMERICO (MB535)**

SE PERMITE UNA HOJA DE FORMULARIO.

Problema 1

a) Considere la siguiente tabla de valores de una función f

x	-1	1	4
***f*(*x*)**	2	-2	-8

Suponiendo que f es un polinomio que:

$$f[-1,1,2] = 4, \quad f[-1,1,2,4,x]=3 \quad \forall x \in R \setminus \{-1,1,2,4\}$$

Determine la forma de $f(x)$.

SOLUCION

Obtenemos:

$f[-1,1] = -2$

$f[-1,1,2,4] = -2$

por dato:

$f[-1,1,2] = 4$, $f[-1,1,2,4,x]=3$

Sea la tabla de diferencias divididas:

-1	2				
		-2			
1	-2		4		
		c		h	
2	a		f		3
		d		i	
4	-8		g		
		e			
x	b				

Se tiene:

$$4 = \frac{c-(-2)}{2-(-1)} \Rightarrow c = 10$$

$$c = 10 = \frac{a-(-2)}{2-1} \Rightarrow a = 8$$

$$d = \frac{-8-a}{4-2} \Rightarrow d = -8$$

$$f = \frac{d-c}{4-1} \Rightarrow f = -6$$

$$h = \frac{f-4}{4-(-1)} \Rightarrow h = -2$$

Por lo tanto el polinomio de Newton basado en diferencias divididas será:

$$p(x)=2-2(x+1)+4(x+1)(x-1)-2(x+1)(x-1)(x-2)+3(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)$$
$$p(x)=3x^4-20x^3+29x^2+18x-32\,.$$

b) Sea la integral

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)$$

Donde $x_0=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ e $x_1=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ son los ceros de un polinomio de grado 2 ortogonal en [-1 2].

1. Calcule los coeficientes A_0 y A_1 tal que la fórmula sea exacta para polinomios de grado ≤3
2. Usando la fórmula de la cuadratura obtenida en a), calcule: $\int_{-2}^{3}\dfrac{dx}{x+3}$

SOLUCION

2*n+1=3 ➔ n=1 base {1 x}

b.1

$$\int_{-1}^{2} 1dx = Ao(1)+A1(1)=x\Big|_{-1}^{2}=3$$

$$\int_{-1}^{2} xdx = Ao(xo)+A1(x_1)=\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{2}=3/2$$

Sistema

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ x_0 & x_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_o\\ A_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 3/2\end{bmatrix}$$

Ao=1.5
A1= 1.5
b.2

```
>> z=[x0 x1]
          z =   1.36602540378444  -0.36602540378444
>> x=(5*z-1)/3

x =   1.94337567297406  -0.94337567297406

>> f=inline('1./(x+3)')
>> w=[1.5  1.5]
>> I=5/3*sum(w.*f(x))
I =   1.72131147540984
```

c) Sea: $\phi''=2r^3\phi'+r^2\phi+2r-1$, $\phi'(0)=0.5$ $\phi(1)=2$ $0\le r\le 1$. Muestre el sistema de ecuaciones luego de aplicar diferencias finitas con $\Delta r=1/3$ para aproximar $\phi(0), \phi(1/3), \phi(2/3)$

SOLUCION

Discretizacion $h=\Delta r={}^{1}\!/_{3}$

$r_{-1} = -\frac{1}{3}$	$r_0 = 0$	$r_1 = \frac{1}{3}$	$r_2 = \frac{2}{3}$	$r_3 = 1$
ϕ_{-1}	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	$\phi_3 = 2$

ϕ_{-1} es un punto ficticio, las incógnitas son ϕ_0, ϕ_1 y ϕ_2, por lo tanto requerimos 3 ecuaciones:

$\phi_i'' = 2r_i^3\phi_i' + r_i^2\phi_i + 2r_i - 1$, para $i = 0, 1, 2$ y reemplazando por formulas de diferenciación numérica:

$$i = 0 \qquad \frac{\phi_1 - 2\phi_0 + \phi_{-1}}{h^2} = 2r_0^3\,\frac{\phi_1 - \phi_{-1}}{2h} + r_0^2\phi_0 + 2r_0 - 1 \qquad (1)$$

$$i = 1 \qquad \frac{\phi_2 - 2\phi_1 + \phi_0}{h^2} = 2r_1^3\,\frac{\phi_2 - \phi_0}{2h} + r_1^2\phi_1 + 2r_1 - 1 \qquad (2)$$

$$i = 2 \qquad \frac{\phi_3 - 2\phi_2 + \phi_2}{h^2} = 2r_2^3\,\frac{\phi_3 - \phi_1}{2h} + r_2^2\phi_2 + 2r_2 - 1 \qquad (3)$$

Además por condición de frontera:

$$\phi_0' = \frac{1}{2} = \frac{\phi_1 - \phi_{-1}}{2h} \quad \Rightarrow \quad \phi_{-1} = \phi_1 - h \qquad (4)$$

Reemplazando (4) en (1) y $\phi_3 = 2$ en (3), el sistema queda resuelto.

Problema 2

La ecuación de Clapeyron encontrada en el estudio de las relaciones de propiedades termodinámicas puede ser expresada como:

$$\frac{d\ln P}{dT} = \frac{\Delta Hr}{RT^2},$$

Donde *P*: presión de vapor, *T*: temperatura absoluta, ΔHr : entalpía de vaporización, R: constante de gas. Esta temperatura, es válida para un intervalo limitado de presión y temperatura, puede ser usada para determinar la presión de vapor a cualquier temperatura, reescribiendo la ecuación anterior e integrando a partir de alguna presión y temperatura conocidas P_0, T_0, obtenemos:

$$\ln\frac{P}{P_0} = \int_{T_0}^{T} \frac{\Delta Hr}{RT^2}dT$$

La solución de la ecuación anterior requiere del cálculo de la integral indicada. Por lo que en muchos casos ΔHr, no puede ser dada en una expresión analítica y la integral debe entonces ser calculada por un **método numérico (Simpson 1/3).**
Considere una sustancia para la cual los siguientes datos son conocidos:

T	185	190	195	200	205	210
ΔHr	81.307	80.472	79.568	78.714	77.859	77.002

T	215	220	225	230	235
ΔHr	76.141	75.272	74.395	73.508	72.610

R=0.01614 Kcal/Kg, *P*o=0.028 atm en *T*o=185 ºK, usando 3, 5, 7, y 11 puntos. Con 11 puntos es posible determinar cuantas cifras decimales son correctas? Si su respuesta es afirmativa diga cual es la precisión obtenida.

SOLUCION

```
R = 0.01614
To=185
T=235
T=[185    190  195      200      205      210 215          220      225      230      235]
y=[81.307  80.472  79.568  78.714  77.859 77.002  76.141 75.272 74.395 73.508
     72.610]
f=y./(R*T.*T)
```

Con 3 puntos

```
h=25
I3=h/3*(f(1)+4*f(6)+f(end))

I3 =   5.5116
P=po*exp(I3)
```

P=6.9310

Con 5 puntos

```
>> h=10
>> I5=h/3*(f(1)+4*f(3)+f(5))+15/3*(f(5)+4*f(8)+f(11))
I5 =  5.5103
>>P= po*exp(I5)
```

P= 6.9223

Con 7 puntos

```
>> I7=5/3*(f(1)+4*f(2)+f(3))+10/3*(f(3)+4*f(5)+2*f(7)+4*f(9)+f(11))
I7 =   5.51072139
>> P=po*exp(I7)
```

P=   6.92522553

Con 11 puntos

```
>>h=5;
>> w=[1  4  2  4  2 4  2 4  2  4  1]
>> h/3*sum(w.*f)
ans =   5.51070355
>>P= po*exp(ans)
```

P=   6.92510202

Podemos considerar 3 cifras decimales exactas

Problema 3

La viscosidad de un aceite varía con la temperatura de la forma siguiente:

T (K)	273	280	290	300	310
μ (N.s/m^2)	3,85	2,17	0,999	0,486	0,253

Una fórmula empírica del tipo $\mu = c_0 \exp(c_1 T)$ permite predecir correctamente la variación de μ en función de T. ¿Cuáles son los valores de c_0 y c_1 en este caso?

SOLUCION

Haciendo

$\mathrm{Ln}\ \mu = \mathrm{Ln}\ c_0 + c_1 T$

Luego hariamos un ajuste lineal

c1 =

-0.0737

c0 =

2009500000

La fórmula empírica será:

μ = 2009500000 exp(-0.0737 T)

Los valores aproximados de la viscosidad para la temperatura T

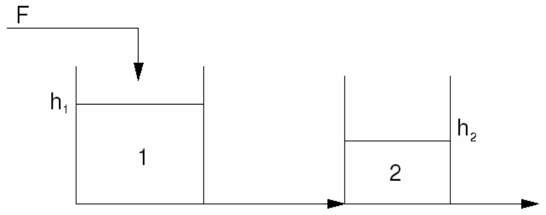
μ =

3.6775 2.1954 1.0506 0.5028 0.2406

El factor de regresión es 0.9103.

Problema 4

Considere dos tanques conectados en serie, donde los flujos a la salida son función de la raíz cuadrada de la altura del tanque. Nótese que el flujo a la salida del tanque 1 es una función de $\sqrt{h_1 - h_2}$, mientras que el flujo a la salida del tanque 2 es una función de $\sqrt{h_2}$.



Las siguientes ecuaciones describen el modelamiento del sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dt} \\ \frac{dh_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, h_1, h_2) \\ f_2(t, h_1, h_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F}{A_1} - \frac{\beta_1}{A_1}\sqrt{h_1 - h_2} \\ \frac{\beta_1}{A_2}\sqrt{h_1 - h_2} - \frac{\beta_2}{A_2}\sqrt{h_2} \end{bmatrix}$$

Donde: $\beta_1 = 2.5\,\frac{Pie^{2.5}}{\min}$, $\beta_2 = \frac{5}{\sqrt{6}}\,\frac{Pie^{2.5}}{\min}$, $A_1 = 5\ Pie^2$, $A_2 = 10\ Pie^2$

Donde el flujo a la entrada F se puede obtener de la siguiente tabla:

$t(\min)$	0	0.2	0.4	0.6
$F\ (Pie^3/\min)$	5.0000	5.0400	5.1600	5.3600

Si en el instante inicial $t = 0\min$ las alturas son $h_1 = 12\ pies$ y $h_1 = 7\ pies$

a) Determine las alturas de los tanques para $t = 0.2, 0.4\min$, para ello utilice Taylor de orden 2, con $\Delta t = 0.2\min$

b) Comente sus resultados.

SOLUCIÓN

a) Los datos de la tabla pueden ser obtenidos mediante la relación: $F = t^2 + 5$, reemplazando valores se tiene:

$$h_1' = \frac{t^2 + 5}{5} - \frac{1}{2}\sqrt{h_1 - h_2}$$

$$h_2' = \frac{1}{4}\sqrt{h_1 - h_2} - \frac{1}{2\sqrt{6}}\sqrt{h_2}$$

$$h_1'' = \frac{2t}{5} - \frac{1}{4}\frac{h_1' - h_2'}{\sqrt{h_1 - h_2}}$$

$$h_2'' = \frac{1}{8}\frac{h_1' - h_2'}{\sqrt{h_1 - h_2}} - \frac{h_2'}{4\sqrt{6h_2}}$$

$t(0) = 0 \quad h_1(0) = 12 \quad h_2(0) = 7$

$t(0.2) = t(0) + \Delta t = 0 + 0.2 = 0.2$

$$h_1(0.2) = h_1(0) + \Delta t\, h_1'(0) + \frac{\Delta t^2}{2} h_1''(0) = 12 + 0.2 * \text{-}0.1180 + \frac{0.2^2}{2} 0.0153 = 11.9767$$

$$h_2(0.2) = h_2(0) + \Delta t\, h_2'(0) + \frac{\Delta t^2}{2} h_2''(0) = 7 + 0.2 * 0.0190 + \frac{0.2^2}{2}(\text{-}\,0.0084) = 7.0036$$

$$t(0.4) = t(0.2) + \Delta t = 0.2 + 0.2 = 0.4$$

$$h_1(0.4) = h_1(0.2) + \Delta t\, h_1{}'(0.2) + \frac{\Delta t^2}{2} h_1{}''(0.2) = 11.9767 + 0.2 * -0.1070 + \frac{0.2^2}{2} 0.0939 = 11.9572$$

$$h_2(0.4) = h_2(0.2) + \Delta t\, h_2{}'(0.2) + \frac{\Delta t^2}{2} h_2{}''(0.2) = 7.0036 + 0.2 * 0.0173 + \frac{0.2^2}{2}(-0.0076) = 7.0069$$

b) Los resultados son satisfactorios para esta aplicación.

Los Profesores